**Zadanie 1.**

W celu wykonania całki oznaczonej danej funkcji metodą nie-analityczną (tj. nie poprzez analityczne odnalezienie jej funkcji pierwotnej), najprościej sięgnąć po podstawowe narzędzie stworzone (m.in.) w tym właśnie celu. Jest nim rozwinięcie funkcji podcałkowej w szereg Taylora (z wybraną, dowolnie dużą dokładnością) i następnie odcałkowanie otrzymanego wielomianu, co nie sprawia już żadnych trudności.

Teorię odnaleźć można m.in. w *Skwarczyńskim, „Istota Struktury Formalnej t.I”* oraz *Sołtysiaku „Analiza Matematyczna cz.1”*. Warto zauważyć, iż w informatyce (programy całkujące numerycznie) bardzo często używają tej właśnie czystej metody, a nie obciążających i niepewnych ciągów sum całkowych Riemanna (ciągów ze względu na rosnącą liczbą podziałów przedziału całkowania, czyli tzw. ciągu względem inkluzji).

W naszym przykładzie przyjmiemy dokładność do czwartego stopnia wielomianu Taylora, a rozwiniemy go – dla maksymalnej precyzji dopasowania – wokół środka przedziału całkowania, tj. wokół x = 0.8.

Zauważmy, że procedura jest jak wykonywalna, ponieważ zarówno $\sqrt{x}$ , jak i $\cos x$ są funkcjami różniczkowalnymi nieskończenie wiele razy w otoczeniu 0.8 i własność tę naturalnie dziedziczy ich iloczyn (czyli funkcja podcałkowa).

Aby uniknąć rosnącej liczby pochodnych iloczynów, rozwiniemy osobno $\sqrt{x}$ i $\cos x$ wokół x = 0.8, a następnie przemnożymy otrzymane dwa wielomiany Taylora i odrzucimy wyrazy wyższe, niż 4. stopnia. Reszta wynikowego wielomianu jest nadal mała względem takiego rozwinięcia.

Dla przypomnienia, wzór Taylora: $f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots$ . Szereg można uciąć na dowolnym wyrazie, wówczas pozostająca reszta jest niewielka w stosunku do wyrażenia $(x-x_0)^{n+1}$ . Im dalej od punktu rozwinięcia wielomianu oraz im mniej wyrazów weźmiemy pod uwagę, tym nasze przybliżenie jest mniej precyzyjne. Jeśli uwzględnimy nieskończenie wiele wyrazów i szereg taki jest zbieżny, wówczas wzór jest ścisły (równość zamiast przybliżonej równości). Nb., szereg Taylora wokół x = 0 ( $x_0=0$ ) nazywamy szeregiem McLaurina.

$$x^{1/2} \approx (0.8)^{1/2} + \frac{1/2\,(0.8)^{-1/2}}{1!}(x-0.8) + \frac{-1/4\,(0.8)^{-3/2}}{2!}(x-0.8)^2 + \frac{3/8\,(0.8)^{-5/2}}{3!}(x-0.8)^3 + \frac{-15/16\,(0.8)^{-7/2}}{4!}(x-0.8)^4 \quad .$$

Natomiast

$$\cos x \approx \cos(0.8) + \frac{-\sin(0.8)}{1!}(x-0.8) + \frac{-\cos(0.8)}{2!}(x-0.8)^2 + \frac{\sin(0.8)}{3!}(x-0.8)^3 + \frac{\cos(0.8)}{4!}(x-0.8)^4 \quad .$$

Porządkując i obcinając wszystkie ułamki na trzecim miejscu po przecinku, mamy

$$x^{1/2} \approx 0.894 + 0.559(x-0.8) - 0.175(x-0.8)^2 + 0.109(x-0.8)^3 - 0.085(x-0.8)^4 \quad ;$$

$$\cos x \approx 0.697 - 0.717(x-0.8) - 0.348(x-0.8)^2 + 0.120(x-0.8)^3 + 0.029(x-0.8)^4 \quad .$$

Iloczyn obu rozwinięć (zachowujemy tylko stopień najwyżej 4.) daje nam aproksymację funkcji podcałkowej:

$$x^{1/2}\cos x \;\approx\; 0.623 - 0.251(x-0.8) - 0.834(x-0.8)^2 + 0.113(x-0.8)^3 - 0.018(x-0.8)^4 \;\; .$$

(Zauważmy, jak współczynniki przy kolejnych, dalszych wyrazach szeregu, zarówno dla $\sqrt{x}$ , $\cos x$ , jak i ich iloczynu, są coraz mniejsze – ich wpływ w otoczeniu $x=x_0$ na wartość rozwinięcia maleje, są one coraz mniej znaczące).

W całce do policzenia zastosujemy liniową zamianę zmiennych, aby pozbyć się -0.8 z argumentu:

$$t:=x-0.8;\;\; dt=dx$$
$$x=0.2 \Rightarrow t=-0.6;$$
$$x=1.4 \Rightarrow t=0.6.$$

A zatem

$$I=\int_{-0.6}^{0.6}\sqrt{t}\,\cos t\;dt=\int_{-0.6}^{0.6}[\,0.623 - 0.251(x-0.8) - 0.834(x-0.8)^2 + 0.113(x-0.8)^3 - 0.018(x-0.8)^4\,]\,dt=$$
$$=[\,0.623t - 0.126t^2 - 0.278t^3 + 0.028t^4 + 0.004t^5\,]_{-0.6}^{0.6} = 0.628.$$